

werden, beispielsweise durch Betrachtung der Einzelfallreserven des ältesten Anfalljahres. In den Fällen, in denen die geschätzte „tail“-Schadenlast eine solche „benchmark“ deutlich unterschreitet, sollte eine weitergehende Analyse des erwarteten Schadenverlaufs des betrachteten Portfolios erfolgen, die auch eine Überprüfung der Annahmen der gewählten „tail“-Schätzung einschließt.

4.3.2 Extrapolation

Zur Schätzung des „tails“ können die Abwicklungsfaktoren aus den Verfahren der Dresdner Familie (siehe 3.1) mittels geeigneter Funktionen extrapoliert werden. Dabei ist zu beachten, dass die Abwicklungsfaktoren aus den ersten Abwicklungsjahren im Allgemeinen nicht dem gleichen Trend unterliegen wie die späteren Abwicklungsjahre. Sie sollten deshalb nicht in die Regression einbezogen werden. Im GDV-Makro [7] bzw. in [4] wurde für die Approximation der Abwicklungsfaktoren als einfachste Möglichkeit die Exponentialfunktion als Auslauffunktion verwendet. Bei diesem Beispiel war die Log-Linearität jedoch erst ab Abwicklungsjahr 5 erfüllt.

Folgende Funktionstypen bieten sich für eine Kurvenanpassung an:

Exponentialfunktion	$f(k) = 1 + a \cdot \exp(-b \cdot k)$
Weibull-Funktion	$f(k) = 1 / (1 - \exp(-a \cdot k^b))$
Potenzfunktion	$f(k) = a^{(b^k)}$
Inverse Potenzfunktion (auch bekannt als Sherman Curve)	$f(k) = 1 + a \cdot (c + k)^b$

Welcher Funktionstyp sich am besten für die konkrete Schätzung des Nachlaufs eignet, kann entweder durch einen grafischen Vergleich oder z. B. durch Betrachtung der quadratischen Approximationsfehler entschieden werden.

Der „tail“-Faktor ergibt sich dann aus dem Produkt der Abwicklungsfaktoren gemäß der angepassten Kurve jenseits des letzten beobachteten Abwicklungsjahres n bis zu einem festen Endjahr $n + d$. Als festes Endjahr wird ein Zeitpunkt betrachtet, bei dem davon auszugehen ist, dass die Funktion weitgehend abgeklungen ist und das Produkt der Abwicklungsfaktoren dem tatsächlichen Grenzwert hinreichend nahe kommt.

Lineare und nicht-lineare Regression

Dietmar Pfeifer

Lineare Regression: Gegeben seien n Datenpaare (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, n$ mit $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Ferner wird hier zunächst vorausgesetzt, dass alle x_i paarweise verschieden sind. Gesucht wird eine *lineare Ausgleichsfunktion* $y = ax + b$ mit reellen Koeffizienten a, b , die die Datenpaare "möglichst gut" approximiert (so genannte *Regressionsgerade*). Als Gütemaß (Fehlermaß) legen wir die quadratische Abweichung zwischen den "Ist-Werten" y_i und den "Soll-Werten" $ax_i + b$ zu Grunde und erhalten damit folgendes Optimierungsproblem:

$$\min_{a,b} F(a,b) = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$$

Dieses Problem kann mit den klassischen Methoden der Analysis gelöst werden; dazu betrachten wir die partiellen Ableitungen und setzen diese Null (notwendige Bedingung für – relative – Extrema):

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 2 \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i) \cdot x_i = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = 2 \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i) = 0$$

mit den Lösungen

$$\hat{a} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right) \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \right)}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2} = \frac{s_{xy}}{s_{xx}}, \quad \hat{b} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i - \hat{a} \cdot \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \bar{y} - \hat{a} \cdot \bar{x}. \quad (*)$$

Die Größen s_{xy} und s_{xx} können dabei als empirische Kovarianz bzw. empirische Varianz der Datenreihen aufgefasst werden, die Größen \bar{x} und \bar{y} entsprechen den üblichen arithmetischen Mittelwerten. Die Abbildung F ist nun aber global konvex wegen

$$HF = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial a \partial b} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial a \partial b} & \frac{\partial^2 F}{\partial b^2} \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & n \end{bmatrix} \quad (\text{Hesse-Matrix})$$

mit

$$\det(HF) = \frac{\partial^2 F}{\partial a^2} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial b^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial a \partial b} \right)^2 = 2n^2 \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \right) = \text{Var}(X) > 0$$

und

$$\frac{\partial^2 F}{\partial b^2} = n > 0,$$

wobei formal X eine diskret gleichverteilte Zufallsvariable über der Menge $\{x_1, \dots, x_n\}$ bezeichne. (Man beachte, dass wegen $n \geq 2$ der Ausdruck $\text{Var}(X) > 0$ und somit die Hesse-Matrix positiv definit ist!) Die Lösungen (Schätzwerte) \hat{a} und \hat{b} sind somit die eindeutig bestimmten globalen Minimumstellen der Funktion F .

Die obigen Rechnungen zeigen, dass das Verfahren auch dann noch funktioniert, wenn die x_i mehrfach auftreten (d.h. multiple Zuordnungen vorkommen), solange die Größe

$$s_{xx} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \right)^2 > 0$$

bleibt. Eine solche Situation liegt beispielsweise vor, wenn es sich bei den y_i um Messwerte aus mehreren Experimenten (z.B. physikalische Körperausdehnung) bei gleichen x_i (z.B. Temperatur) handelt.

Manchmal wird auch nur eine lineare Ausgleichsfunktion der Form $y = ax$ gesucht (man spricht dann von einer *Regression durch den Nullpunkt*). In diesem Fall vereinfachen sich die obigen Rechnungen erheblich, mit der Lösung

$$\hat{a} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i y_i}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i y_i}{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

Nichtlineare Regression: Die Methode der kleinsten Quadrate ist auch anwendbar, wenn nicht-lineare Zusammenhänge zwischen den x - und y -Werten unterstellt werden. Dazu bedient man sich zweckmäßigerweise geeigneter *linear unabhängiger Funktionensysteme* $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, z.B. Polynome unterschiedlichen Grades. Das abstrakte Modell ist hier

$$y = \sum_{k=1}^K a_k \cdot f_k(x) \quad \text{mit } K \in \mathbb{N} \text{ und reellen Koeffizienten } a_1, \dots, a_K.$$

Das zugehörige quadratische Optimierungsproblem lautet dann sinngemäß

$$\min_{a_1, \dots, a_K} F(a_1, \dots, a_K) = \sum_{i=1}^n \left(y_i - \sum_{k=1}^K a_k f_k(x_i) \right)^2 = \min_{\mathbf{a}} F(\mathbf{a}) = \|\mathbf{y} - D\mathbf{a}\|^2$$

mit dem Koeffizientenvektor $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_K \end{pmatrix}$, dem Wertevektor $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ und der $n \times K$ -(Design-

)Matrix $D = [f_k(x_i)]_{i=1 \dots n, k=1 \dots K}$. Wegen

$$F(\mathbf{a}) = \|\mathbf{y} - D\mathbf{a}\|^2 = (\mathbf{y} - D\mathbf{a})^T (\mathbf{y} - D\mathbf{a}) = \mathbf{y}^T \mathbf{y} - 2\mathbf{y}^T D\mathbf{a} - \mathbf{a}^T D^T D\mathbf{a}$$

ergibt sich für den Gradienten von F :

$$\nabla F = 2D^T \mathbf{y} - 2D^T D \mathbf{a}.$$

Durch Nullsetzen der partiellen Ableitungen ergibt sich also das Gleichungssystem

$$D^T D \mathbf{a} = D^T \mathbf{y}$$

mit der Lösung

$$\hat{\mathbf{a}} = (D^T D)^{-1} D^T \mathbf{y}.$$

Man beachte, dass die Matrix $D^T D$ stets positiv semidefinit ist (vgl. Abschnitt II.9). Die Inverse von $D^T D$ existiert also genau dann, wenn $D^T D$ positiv definit ist (d.h. alle Eigenwerte von $D^T D$ sind positiv).

Im Fall der klassischen linearen Regression ist etwa $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$ mit $D = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix}$, also

$$D^T D = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \end{bmatrix}$$

und

$$D^T \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i y_i \end{pmatrix},$$

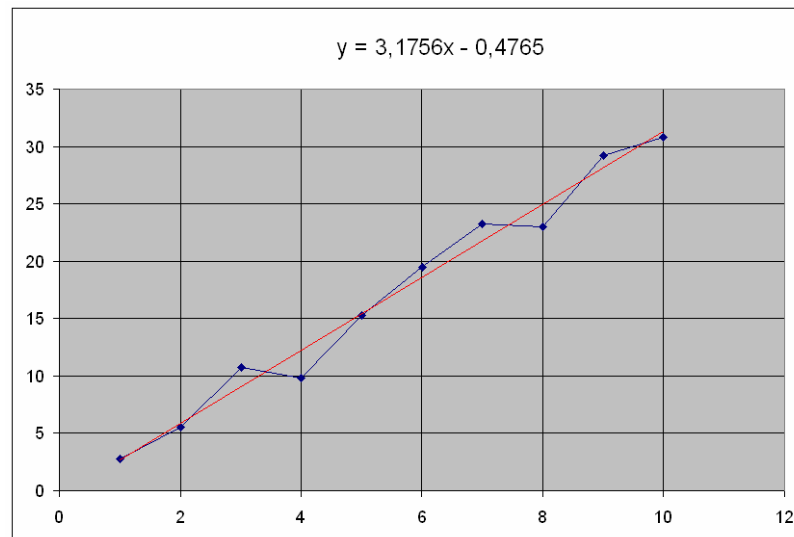
woraus sich wieder die oben angegebene Lösung ergibt.

Beispiel: An den folgenden Datensatz soll einmal eine lineare, zum anderen eine quadratische Funktion angepasst werden:

x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	2,771	5,522	10,753	9,828	15,262	19,480	23,218	23,030	29,231	30,797

1. *Lineare Regression:* Es ist

$$s_{xy} = 26,199 \quad s_{xx} = 8,500 \quad \hat{a} = \frac{s_{xy}}{s_{xx}} = 3,176 \quad \hat{b} = \bar{y} - \hat{a} \cdot \bar{x} = -0,476$$



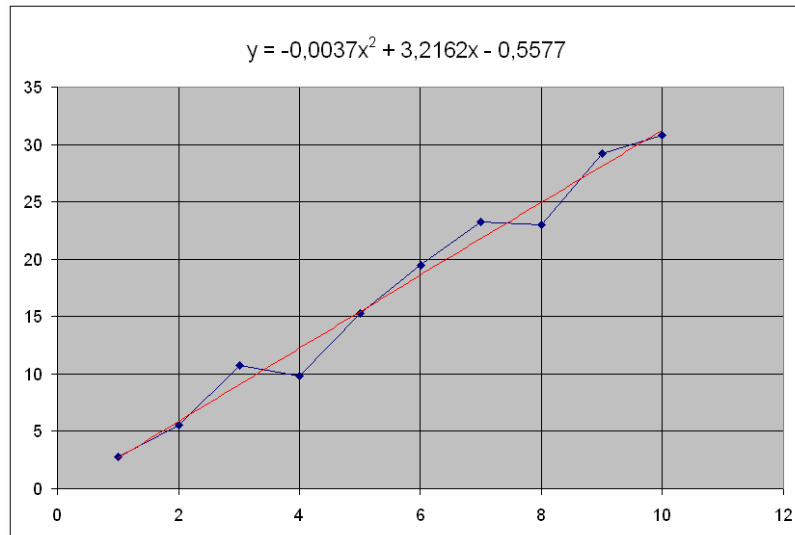
lineare Regression

2. *Quadratische Regression*: Hier ist

$$D = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{10} & x_{10}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \\ 1 & 5 & 25 \\ 1 & 6 & 36 \\ 1 & 7 & 49 \\ 1 & 8 & 64 \\ 1 & 9 & 81 \\ 1 & 10 & 100 \end{bmatrix}, \quad D^T D = \begin{bmatrix} 10 & 55 & 385 \\ 55 & 385 & 3025 \\ 385 & 3025 & 25333 \end{bmatrix},$$

$$(D^T D)^{-1} = \frac{1}{2640} \begin{bmatrix} 3651 & -1386 & 110 \\ -1386 & 637 & -55 \\ 110 & -55 & 5 \end{bmatrix}, \quad D^T \mathbf{y} = \begin{pmatrix} 169,892 \\ 1196,391 \\ 9420,727 \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{a}} = (D^T D)^{-1} D^T \mathbf{y} = \begin{pmatrix} -0,5577 \\ 3,2162 \\ -0,0037 \end{pmatrix}$$



quadratische Regression

Manchmal werden auch nichtlineare Funktionen f vorgegeben, die zwei Parameter a und b enthalten, und die in Form von

$$y = f(x; a, b)$$

eine Ausgleichsfunktion durch die Datenpunkte liefern sollen. Dies ist die typische Situation für die Modellierung von Auslauffunktionen bei der Spätschadenreservierung. Hier kann man das Problem in der Regel durch nichtlineare Transformationen der Daten in ein gewöhnliches lineares Regressionsproblem lösen. Hierbei sind prinzipiell zwei asymptotische Verhaltensweisen zu unterscheiden, je nachdem, ob *Schadenstände* (Modell I) oder *Schadenzuwächse* (Modell II) betrachtet werden. Im ersten Fall konvergieren die Abwicklungsfaktoren gegen 1, im zweiten Fall gegen 0. Man kann den zweiten Fall aber leicht auf den ersten zurückführen. Hierbei ist aber zu beachten, dass die Abwicklungsfaktoren in Modell 1 *größer als 1* und im zweiten Modell *größer als 0* sein müssen. Ist diese Voraussetzung verletzt, müssen vor Berechnung des Nachlaufs geeignete Modifikationen vorgenommen werden, auf die wir auch eingehen.

Beispieldatensatz für Abwicklungsfaktoren im Modell I:

x_i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
y_i	1,122	1,093	1,073	1,067	1,052	1,045	1,031	1,026	1,016	1,014

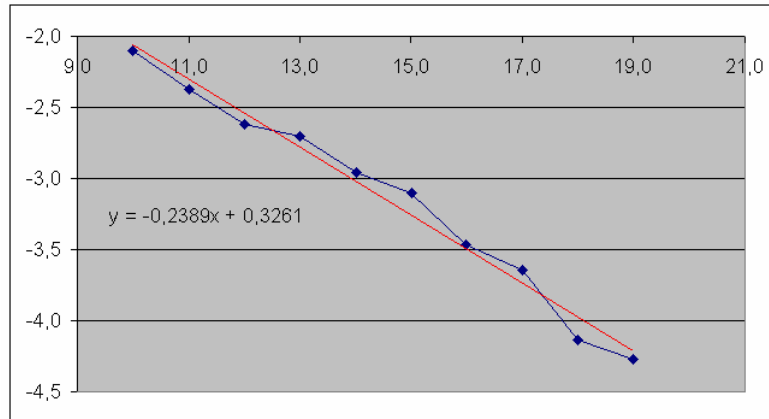
Fall 1: $f(x) = 1 + A \cdot \exp(-Bx)$:

Logarithmische Transformation:

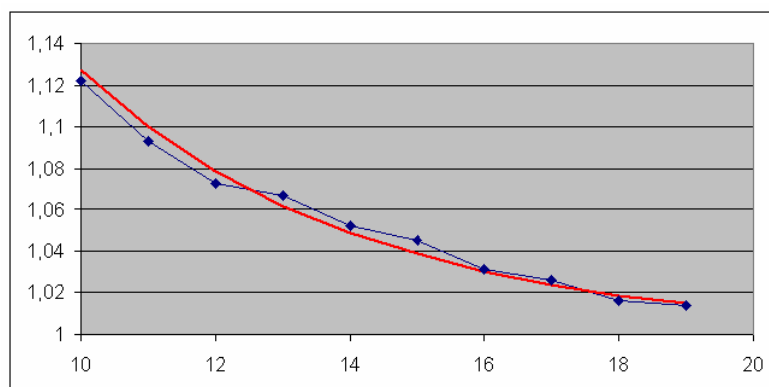
$$y^* = \ln(y - 1) = \ln A - Bx = ax^* + b$$

Wähle die transformierten Daten $x_i^* = x_i$, $y_i^* = \ln(y_i - 1)$, Parameter: $b = \ln A$, $a = -B$ bzw. $A = \exp(b)$, $B = -a$.

x_i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
y_i^*	-2,104	-2,375	-2,617	-2,703	-2,957	-3,101	-3,474	-3,650	-4,135	-4,269



Hier ist nach Berechnung mit Formel (*) oben $a = -0,2389$ und $b = 0,3261$, also $A = 1,3855$ und $B = 0,2389$. Graphische Darstellung im Original:



Fall 2: $f(x) = \frac{1}{1 - \exp(-Ax^B)}$:

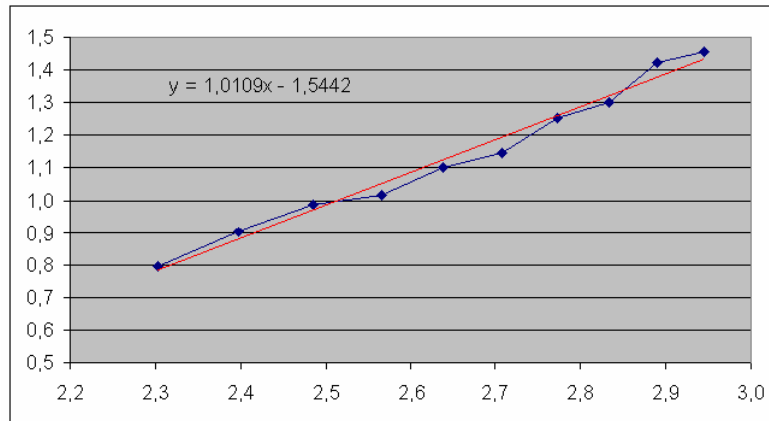
Doppelt-logarithmische Transformation:

$$y^* = \ln \left[-\ln \left(1 - \frac{1}{y} \right) \right] = \ln A + B \ln x = ax^* + b$$

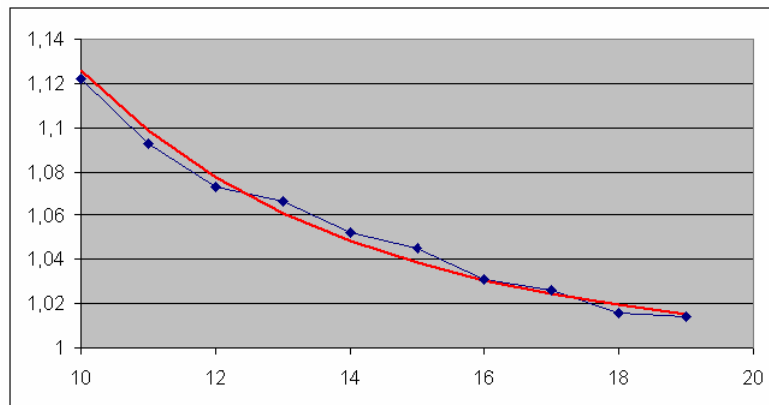
Wähle die transformierten Daten $x_i^* = \ln x_i$, $y_i^* = \ln \left[-\ln \left(1 - \frac{1}{y_i} \right) \right]$, Parameter:

$b = \ln A$, $a = B$ bzw. $A = \exp(b)$, $B = a$.

x_i^*	2,3026	2,3979	2,4849	2,5649	2,6391	2,7081	2,7726	2,8332	2,8904	2,9444
y_i^*	0,7970	0,9018	0,9887	1,0181	1,1010	1,1458	1,2540	1,3016	1,4234	1,4546



Hier ist nach Berechnung mit Formel (*) oben $a = 1,0109$ und $b = -1,5442$, also $A = 0,2135$ und $B = 1,0109$. Graphische Darstellung im Original:



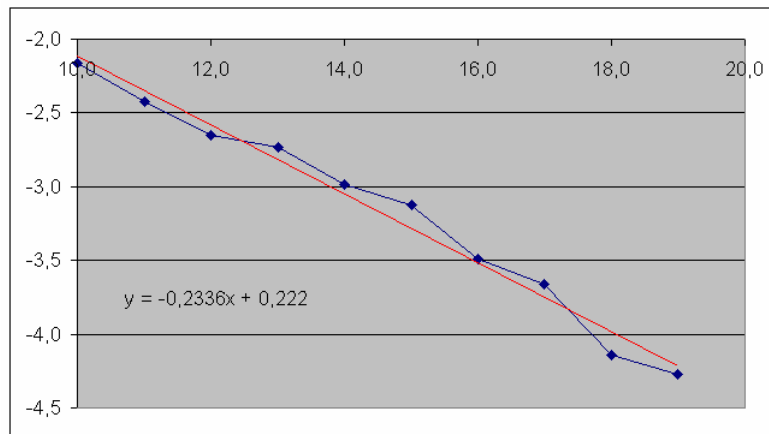
Fall 3: $f(x) = A^{(B^x)}$:

Dopelt-logarithmische Transformation:

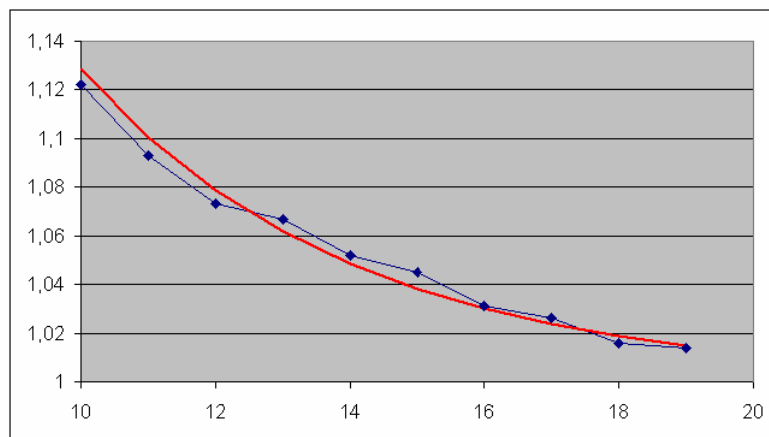
$$y^* = \ln(\ln y) = x \ln B + \ln(\ln A) = ax^* + b$$

Wähle die transformierten Daten $x_i^* = x_i$, $y_i^* = \ln(\ln y_i)$, Parameter: $b = \ln(\ln A)$, $a = \ln B$ bzw. $A = \exp(\exp(b))$, $B = \exp(a)$.

x_i^*	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
y_i^*	-2,162	-2,420	-2,653	-2,736	-2,982	-3,123	-3,489	-3,663	-4,143	-4,276



Hier ist nach Berechnung mit Formel (*) oben $a = -0,2336$ und $b = 0,222$, also $A = 3,4854$ und $B = 0,7917$. Graphische Darstellung im Original:



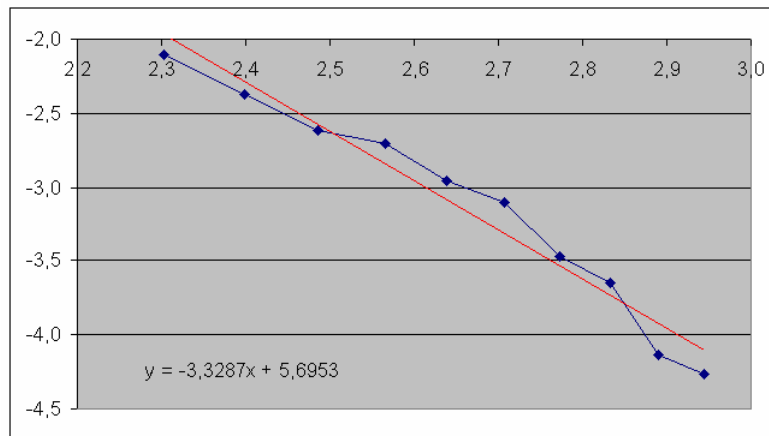
Fall 4: $f(x) = 1 + A \cdot x^B$:

Logarithmische Transformation:

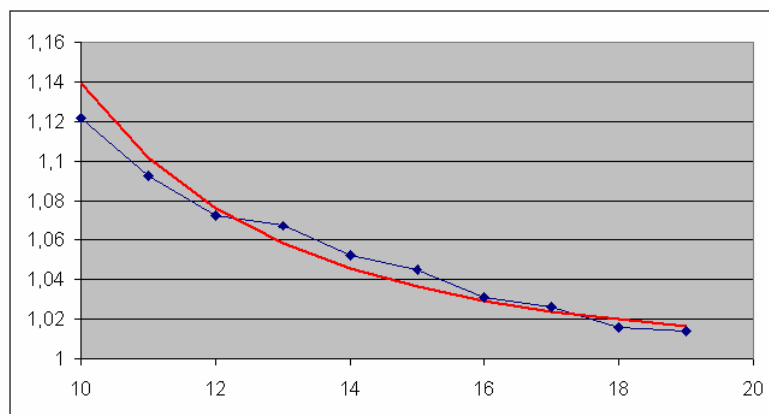
$$y^* = \ln(y - 1) = \ln A + B \ln x = ax^* + b$$

Wähle die transformierten Daten $x_i^* = \ln x_i$, $y_i^* = \ln(y_i - 1)$, Parameter: $b = \ln A$, $a = B$ bzw. $A = \exp(b)$, $B = a$.

x_i^*	2,3026	2,3979	2,4849	2,5649	2,6391	2,7081	2,7726	2,8332	2,8904	2,9444
y_i^*	-2,104	-2,375	-2,617	-2,703	-2,957	-3,101	-3,474	-3,650	-4,135	-4,269



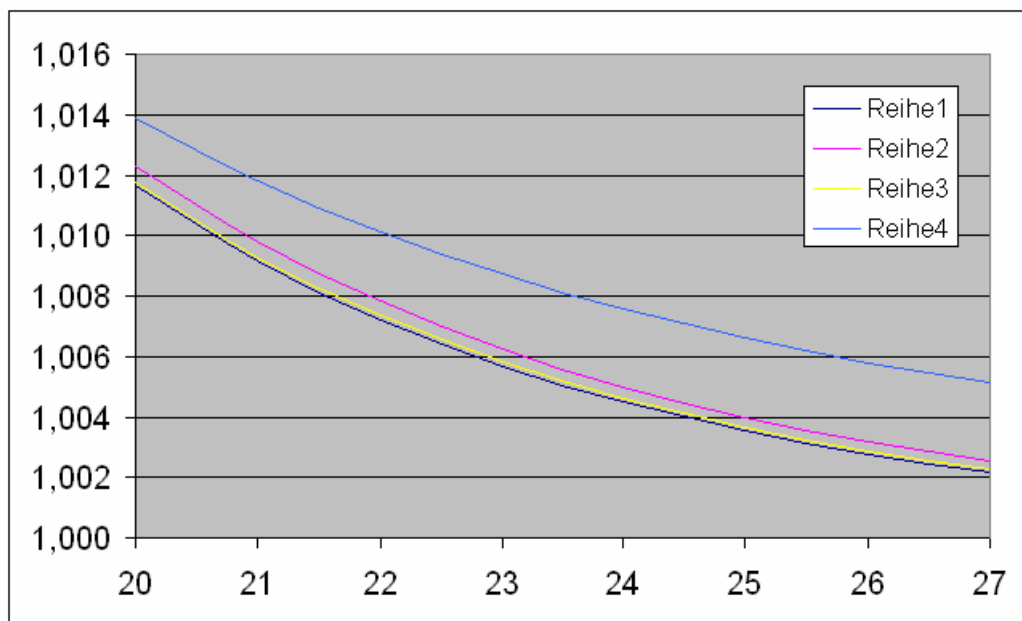
Hier ist nach Berechnung mit Formel (*) oben $a = -3,3287$ und $b = 5,6953$, also $A = 297,4660$ und $B = -3,3287$. Graphische Darstellung im Original:



Als Schätzer für die nachfolgenden Abwicklungsfaktoren erhält man mit diesen vier Ansätzen folgendes Ergebnis:

k	20	21	22	23	24	25	26	27
$f(k)$ Ansatz 1	1,0117	1,0092	1,0072	1,0057	1,0045	1,0035	1,0028	1,0022
$f(k)$ Ansatz 2	1,0123	1,0098	1,0078	1,0063	1,0050	1,0040	1,0032	1,0025
$f(k)$ Ansatz 3	1,0118	1,0093	1,0074	1,0058	1,0046	1,0036	1,0029	1,0023
$f(k)$ Ansatz 4	1,0139	1,0118	1,0101	1,0087	1,0076	1,0066	1,0058	1,0051

In diesem Fall passen die ersten drei Verfahren am besten; sie liegen hier im Ergebnis auch ziemlich dicht beieinander.



Graphischer Vergleich der vier Methoden

Beispieldatensatz für Abwicklungsfaktoren im Modell II:

x_i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
y_i	0,172	0,151	0,098	0,061	0,058	0,049	0,036	0,022	0,013	0,007

Durch den Übergang von y_i auf $y_i + 1$ erhält man Faktoren, die zum Modell I passen. Nach der Schätzung der Koeffizienten in diesem Modell sind dann die fortgeschriebenen Abwicklungsfaktoren wieder um 1 zu reduzieren. Alternativ kann man natürlich auch eine direkte Modellierung betrachten.

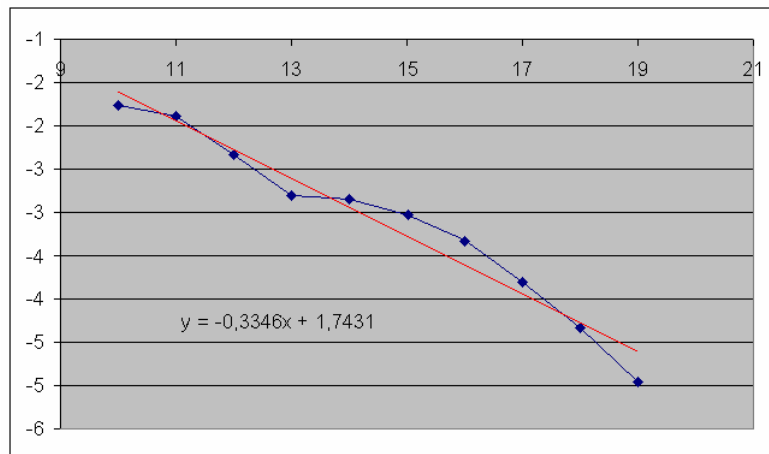
Fall 1: $f(x) = A \cdot \exp(-Bx)$:

Logarithmische Transformation:

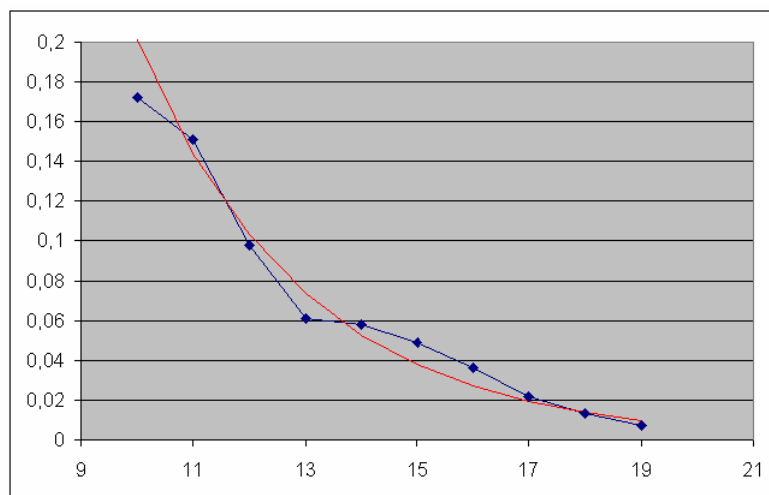
$$y^* = \ln y = \ln A - Bx = ax^* + b$$

Wähle die transformierten Daten $x_i^* = x_i$, $y_i^* = \ln y_i$, Parameter: $b = \ln A$, $a = -B$ bzw. $A = \exp(b)$, $B = -a$.

x_i	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
y_i^*	-1,760	-1,890	-2,323	-2,797	-2,847	-3,016	-3,324	-3,817	-4,343	-4,962



Hier ist nach Berechnung mit Formel (*) oben $a = -0,3346$ und $b = 1,7431$, also $A = 5,7150$ und $B = 0,3346$. Graphische Darstellung im Original:



Fall 2: $f(x) = \frac{1}{1 - \exp(-Ax^B)} - 1 = \frac{1}{\exp(Ax^B) - 1}$:

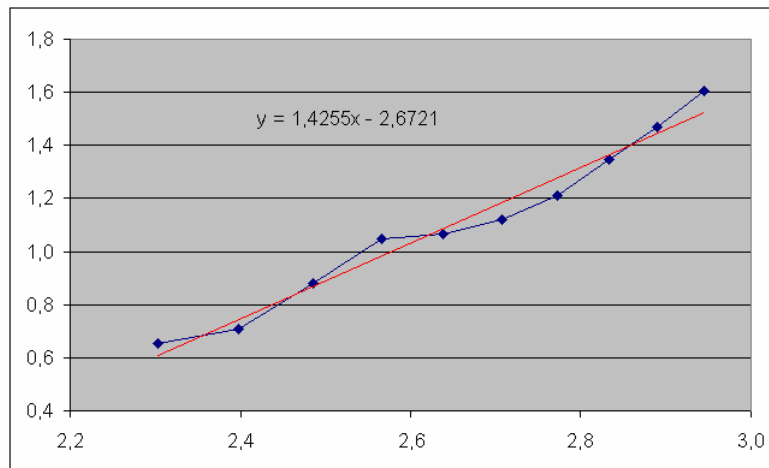
Doppelt-logarithmische Transformation:

$$y^* = \ln \left[\ln \left(1 + \frac{1}{y} \right) \right] = \ln A + B \ln x = ax^* + b$$

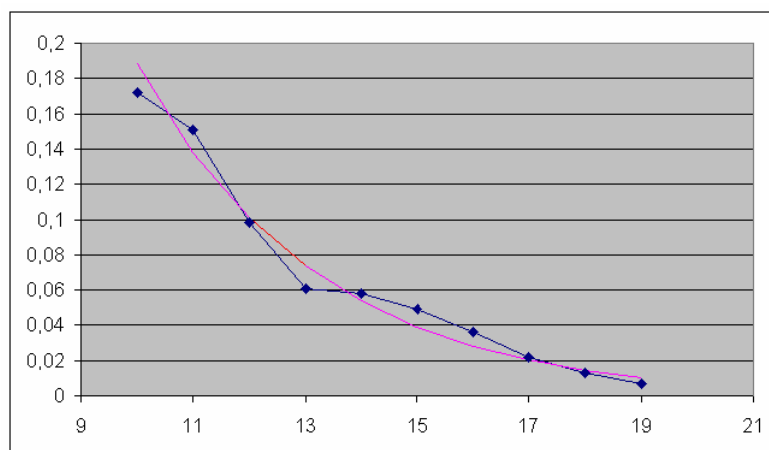
Wähle die transformierten Daten $x_i^* = \ln x_i$, $y_i^* = \ln \left[\ln \left(1 + \frac{1}{y_i} \right) \right]$, Parameter: $b = \ln A$, $a = B$

bzw. $A = \exp(b)$, $B = a$.

x_i^*	2,3026	2,3979	2,4849	2,5649	2,6391	2,7081	2,7726	2,8332	2,8904	2,9444
y_i^*	0,652	0,709	0,882	1,049	1,066	1,120	1,212	1,345	1,471	1,603



Hier ist nach Berechnung mit Formel (*) oben $a = 1,4255$ und $b = -2,6721$, also $A = 0,0691$ und $B = 1,4255$. Graphische Darstellung im Original:



Fall 3: $f(x) = A^{(B^x)} - 1$:

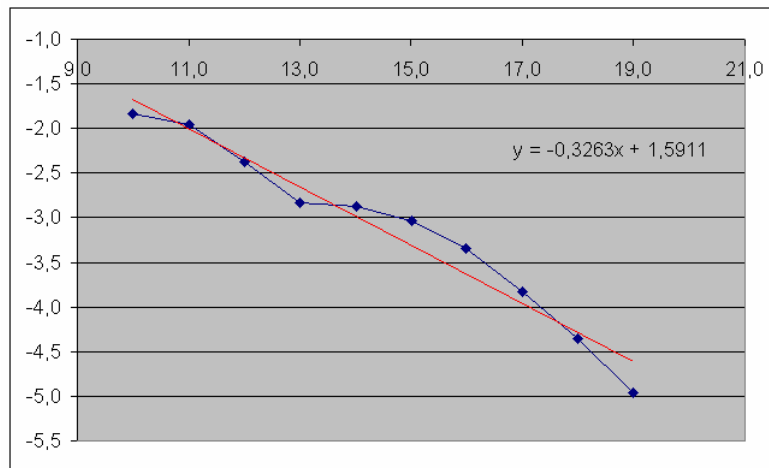
Dopelt-logarithmische Transformation:

$$y^* = \ln(\ln(y + 1)) = x \ln B + \ln(\ln A) = ax^* + b$$

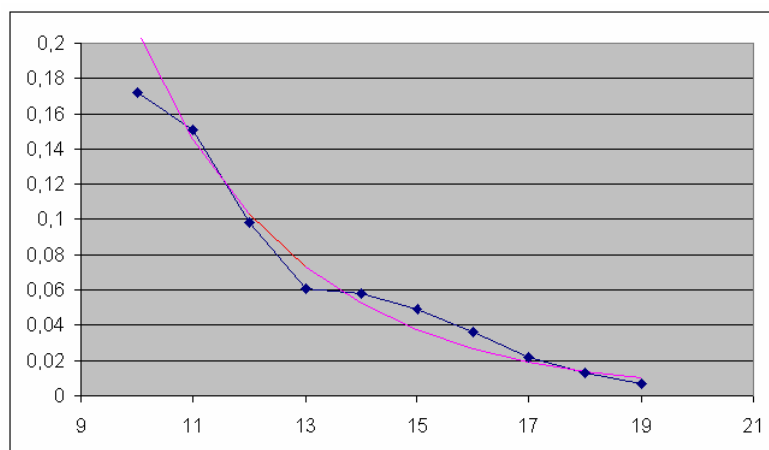
Wähle die transformierten Daten $x_i^* = x_i$, $y_i^* = \ln(\ln(y_i + 1))$, Parameter:

$b = \ln(\ln A)$, $a = \ln B$ bzw. $A = \exp(\exp(b))$, $B = \exp(a)$.

x_i^*	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
y_i^*	-1,841	-1,962	-2,370	-2,827	-2,876	-3,040	-3,342	-3,828	-4,349	-4,965



Hier ist nach Berechnung mit Formel (*) oben $a = -0,3263$ und $b = 1,5911$, also $A = 135,5236$ und $B = 0,7216$. Graphische Darstellung im Original:



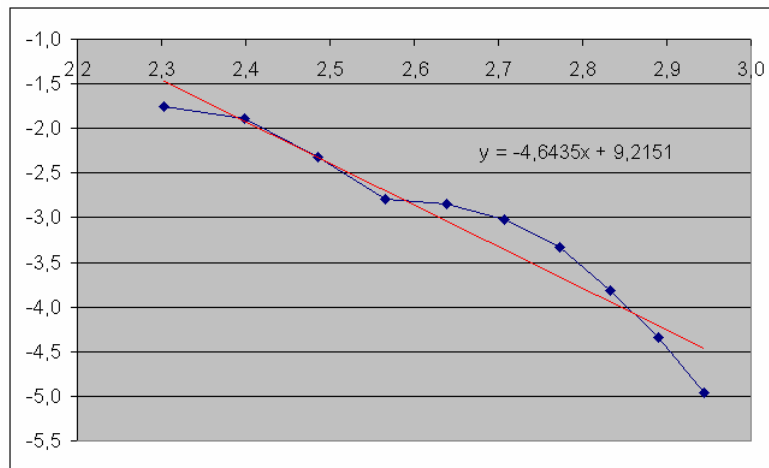
Fall 4: $f(x) = A \cdot x^B$:

Logarithmische Transformation:

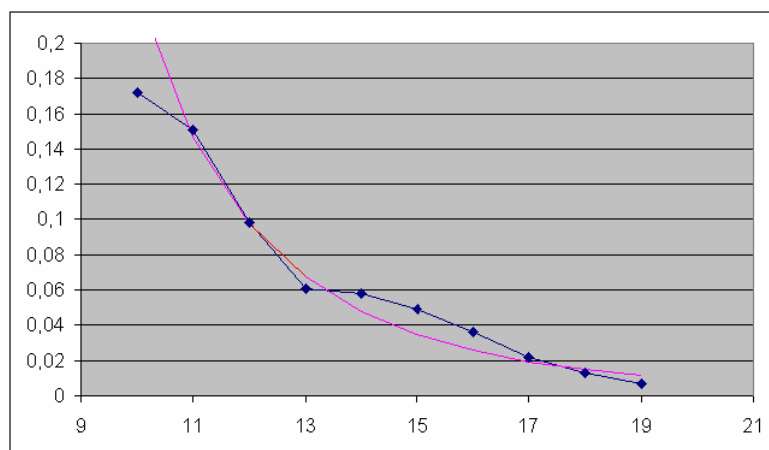
$$y^* = \ln y = \ln A + B \ln x = ax^* + b$$

Wähle die transformierten Daten $x_i^* = \ln x_i$, $y_i^* = \ln y_i$, Parameter: $b = \ln A$, $a = B$ bzw. $A = \exp(b)$, $B = a$.

x_i^*	2,3026	2,3979	2,4849	2,5649	2,6391	2,7081	2,7726	2,8332	2,8904	2,9444
y_i^*	-1,760	-1,890	-2,323	-2,797	-2,847	-3,016	-3,324	-3,817	-4,343	-4,962



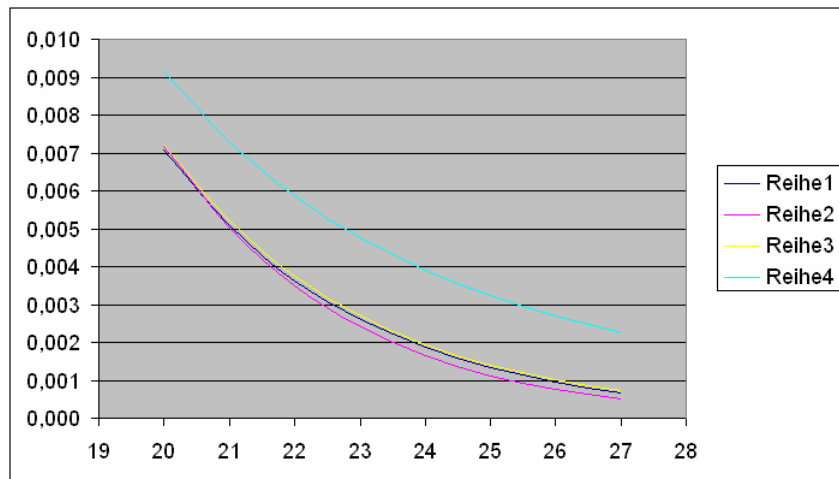
Hier ist nach Berechnung mit Formel (*) oben $a = -4,6435$ und $b = 9,2151$, also $A = 10047,7097$ und $B = -4,6435$. Graphische Darstellung im Original:



Als Schätzer für die nachfolgenden Abwicklungsfaktoren erhält man mit diesen vier Ansätzen folgendes Ergebnis:

k	20	21	22	23	24	25	26	27
$f(k)$ Ansatz 1	0,00709	0,00507	0,00363	0,00260	0,00186	0,00133	0,00095	0,00068
$f(k)$ Ansatz 2	0,00718	0,00502	0,00348	0,00240	0,00165	0,00112	0,00076	0,00051
$f(k)$ Ansatz 3	0,00722	0,00520	0,00375	0,00271	0,00195	0,00141	0,00102	0,00073
$f(k)$ Ansatz 4	0,00914	0,00728	0,00587	0,00477	0,00392	0,00324	0,00270	0,00227

In diesem Fall passen auch hier die ersten drei Verfahren am besten; sie liegen im Ergebnis auch ziemlich dicht beieinander.



Graphischer Vergleich der vier Methoden

Modifikation der Verfahren bei Verletzung der Voraussetzungen

Sind die Voraussetzungen an die Abwicklungsfaktoren in Modell 1 (größer als 1) oder im zweiten Modell (größer als 0) verletzt, können die Verfahren auf Grund der logarithmischen Transformationen nicht durchgeführt werden. In diesem Fall sollten Faktoren kleiner 1 bzw. kleiner 0 durch passende fiktive Zahlen nahe bei 1 bzw. nahe bei 0 ersetzt werden (z.B. Mittelwerte benachbarter Faktoren, sofern das Ergebnis zulässig ist).