Oldenburger Forschungsprojekte zur Umsetzung von Solvency II bei KMVU

1. Oldenburger Versicherungstag
29.8.2007

Angelika May, Dietmar Pfeifer, Doreen Straßburger

Carl von Ossietzky Universität Oldenburg
Fakultät V
Institut für Mathematik

Gliederung

1. Warum Forschung mit / für KMVU?
2. Risikomessung unter Solvency II
3. Probleme mit der Wurzelformel
4. Zusammenfassung und Ausblick

1. Warum Forschung mit / für KMVU?

- Regionaler Bezug: ein großer Teil der klein(st)en VVaG im nordwestdeutschen Raum (Schleswig-Holstein / Niedersachsen / Westfalen) befinden sich in räumlicher Nähe zur Universität Oldenburg

  → Verstärkung der von der Universität gewünschten Kooperation mit der regionalen Wirtschaft

- KMVU besitzen eine „überschaubare" Struktur, meist mit einer Konzentration auf wenige Sparten im Sachversicherungsbereich

  → Reduktion in der Komplexität aktuarieller Modelle, bessere Validierbarkeit

- KMVU verfügen in der Regel über keine spezialisierten Mathematiker (Aktuare)

  → Hilfestellung zur Bewältigung neuer Anforderungen (z.B. im Zusammenhang mit Solvency II / Risikomanagement)

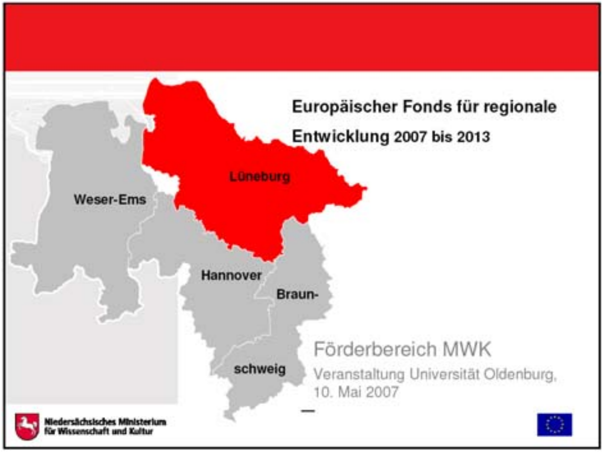
- Win-Win-Situation: KMVU profitieren wirtschaftlich von einer „neutralen“ Kooperation, die Universität profitiert von finanzieller Unterstützung außerhalb der üblichen „klassischen“ Förderwege (DFG, BMBF, …)

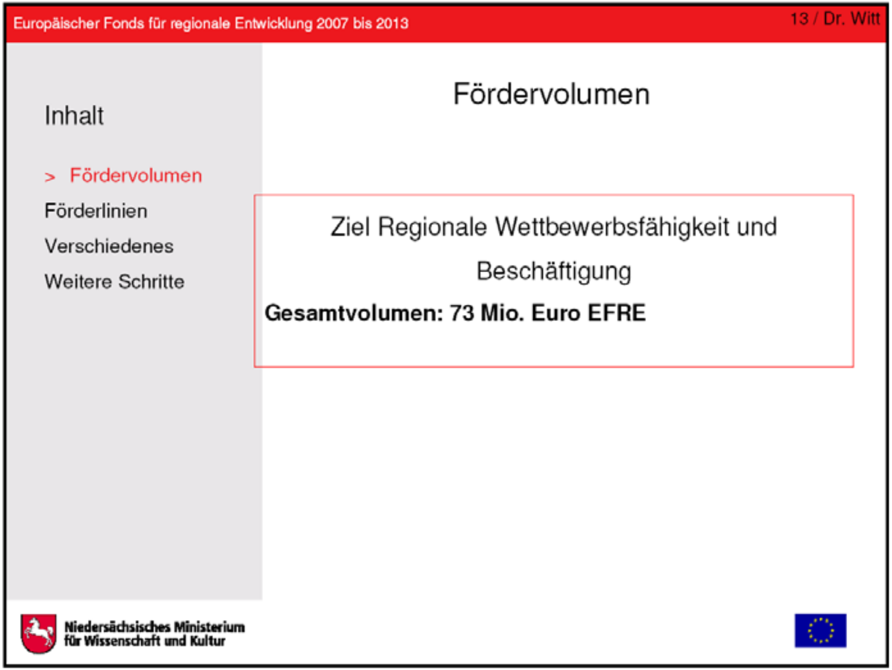
- Fokussierung auf **Methodenentwicklung**, nicht auf **kommerzielle Software-Lösungen**!

  → höhere Transparenz, Validierbarbarkeit, Erfahrungsaustausch mit Verbänden / Aufsichtsbehörden

- Aktueller Förderantrag über EFRE (Europäischer Fonds zur regionalen Entwicklung)

„Entwicklung eines Solvency II-kompatiblen quantitativen Risikomanagement-Modells für kleine Versicherungsunternehmen, insbesondere regionale VVaG's"




Europäischer Fonds für regionale Entwicklung 2007 bis 2013
13 / Dr. Witt
Fördervolumen
Inhalt
> Fördervolumen
Förderlinien
Verschiedenes
Weitere Schritte
Ziel Regionale Wettbewerbsfähigkeit und Beschäftigung
Gesamtvolumen: 73 Mio. Euro EFRE
Niedersächsisches Ministerium für Wissenschaft und Kultur

Strukturfondsförderung 2007 bis 2013

13 / Dr. Witt

Inhalt

Fördervolumen

> Förderlinien

Verfahren

Weitere Schritte

Innovative Verbundprojekte

- Innovative Kooperationsprojekte mit KMU
    - Laufzeit in der Regel zwei Jahre, max. 300.000,- Gesamtkosten; Ausnahmefall drei Jahre
    - FH, Uni, FE, BA Externe Begutachtung nicht-nds. Fachwiss.
- Anwendungsorientierte Forschung an Fachhochschulen mit KMU
    - Laufzeit zwei Jahre, max. 120.000,- Gesamtausgaben
    - Kofinanzierung durch Land
    - Externe Begutachtung Fachwiss.nds. Unis

  – Betriebsstätte des Kooperationspartners im Zielgebiet, vorrangig KMU; Nachweis Struktureffekte, wenn nicht; öffentlich-rechtliche Kooperationspartner
- Innovationsassistent:(Verlängerung max. ein Jahr, wenn Erfolg absehbar

Niedersächsisches Ministerium für Wissenschaft und Kultur

Themenschwerpunkte:

- **Reserverisiko:** Abwicklungsdreiecke, Schätzung der Reserveverteilung, Implementierung von IFRS-Aspekten [Diskontierung, Cost of Capital-Ansatz]

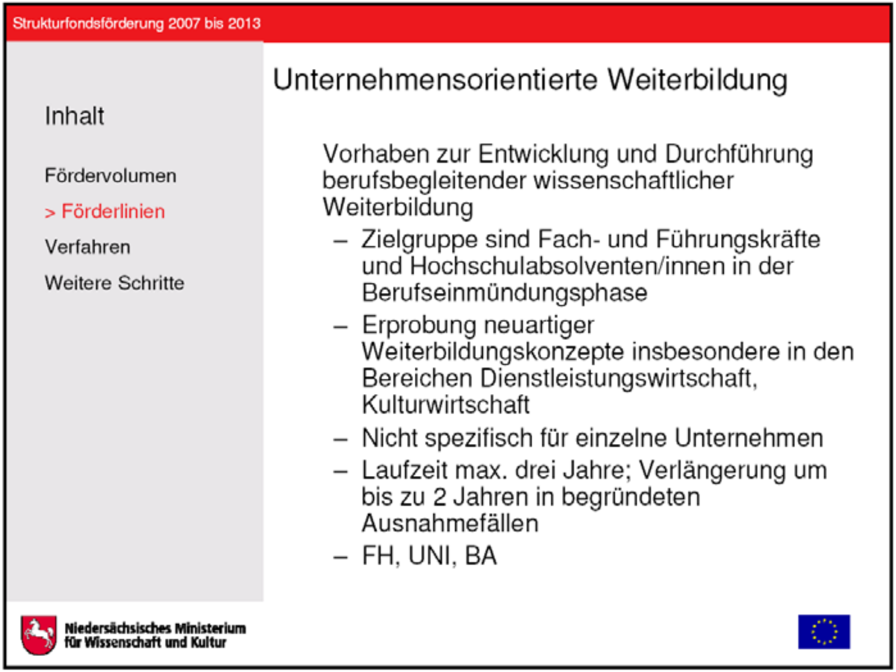
- **Prämienrisiko:** Entwicklung geeigneter Methoden zur Bestimmung statistischer **Schadenverteilungen**

  - aus vorhandenen **Zeitreihen** (**Homogenisierung** durch Indizierung mit Bestandsveränderung [Versicherungssummen, Vertragszahlen] und ggf. weiteren ökonomischen Kenngrößen [z.B. Inflation, Baukostenindex], angemessene Einordnung von „Großschäden“ [Schäden zu hohen Wiederkehrperioden])

  - aus **„physikalischen Modellen“** (Schadenfrequenzen, Einzelschadenhöhen; Kombinationen für unterschiedliche Gefahren)

  - **Abgleich** verschiedener Ansätze (→ „use test“)

- Auswirkungen gegenseitiger **Abhängigkeiten** zwischen verschiedenen Sparten / Risiken


Strukturfondsförderung 2007 bis 2013
Unternehmensorientierte Weiterbildung
Inhalt
Fördervolumen
> Förderlinien
Verfahren
Weitere Schritte
Vorhaben zur Entwicklung und Durchführung berufsbegleitender wissenschaftlicher Weiterbildung
– Zielgruppe sind Fach- und Führungskräfte und Hochschulabsolventen/innen in der Berufseinmündungsphase
– Erprobung neuartiger Weiterbildungskonzepte insbesondere in den Bereichen Dienstleistungswirtschaft, Kulturwirtschaft
– Nicht spezifisch für einzelne Unternehmen
– Laufzeit max. drei Jahre; Verlängerung um bis zu 2 Jahren in begründeten Ausnahmefällen
– FH, UNI, BA
Niedersächsisches Ministerium
für Wissenschaft und Kultur

2. Risikomessung unter Solvency II

Risikomessung unter Solvency II

- **S**olvency **C**apital **R**equirement (SCR) je Risiko wird hier im Sinne von Sandström (2006) verstanden als **Differenz** zwischen einem geeigneten **Risikomaß** und gewissen **Eigenmitteln** (etwa Netto-Prämien = Erwartungswert als Basisgröße).

- Bei normalverteilten Risiken ist das SCR in der Regel ein Vielfaches der Standardabweichung des Risikos, dessen Größe nur vom Risikoniveau abhängt

- Das SCR für das Gesamtrisiko wird als **Wurzel** der Summe von Quadraten der einzelnen SCR's dargestellt (→ Wurzelformel der NAIC / IAA; ***Standardmodell***).

Definition (kohärentes Risikomaß):

Ein *Risikomaß* R auf einer geeigneten Menge $\mathfrak{D} \subseteq \mathcal{Z}$ der reellwertigen Zufallsvariablen (Risiken) heißt *kohärent* im Sinne von ARTZNER, DELBAEN, EBER und HEATH (1999), wenn es die folgenden Eigenschaften besitzt:

[1] R ist ***positiv homogen***, d.h.

$$R(cX) = c\,R(X) \text{ für alle } c > 0 \text{ und } X \in \mathfrak{D};$$

[2] R ist ***translationsinvariant***, d.h.

$$R(X + c) = R(X) + c \text{ für alle } X \in \mathfrak{D} \text{ und } c \in \mathbb{R};$$

[3] R ist ***monoton***, d.h.

$$R(X) \leq R(Y) \text{ für alle } X, Y \in \mathfrak{D} \text{ mit } X \leq Y;$$

[4] R ist ***subadditiv***, d.h.

$$R(X + Y) \leq R(X) + R(Y) \text{ für alle } X, Y \in \mathfrak{D}.$$

Die internationale Diskussion über Risikomaße als Basis für die Bestimmung des **Zielkapitals** für Solvency II (IAA, DAV, SST) in Bezug auf das versicherungstechnische Gesamtrisiko S konzentriert sich im Wesentlichen auf

***Value at Risk*:** $VaR_\alpha(S) := q_{1-\alpha}(S) = F_S^{-1}(1-\alpha) = \inf\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, F_S(x) \geq 1-\alpha\right\};$

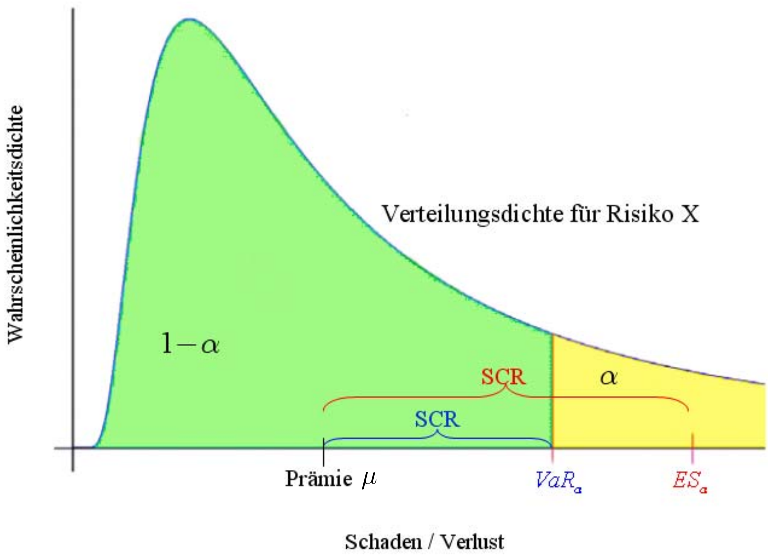
[in der Versicherungstechnik bekannt unter:

***P**robable **M**aximum **L**oss* (PML) zur Wiederkehrperiode $1/\alpha$]

und

Expected Shortfall *(auch Tail Value at Risk genannt)***:**

$$\mathrm{ES}_\alpha(S) := E\left(S \,\middle|\, S \geq \mathrm{VaR}_\alpha(S)\right) = \frac{1}{\alpha}\int_{1-\alpha}^{1} F_S^{-1}(x)\,dx = \frac{1}{\alpha}\int_{0}^{\alpha} \mathrm{VaR}_u(S)\,du.$$



ES_α : "Mittel" aller Werte oberhalb von VaR_α

Wurzelformel:

$$SCR_{gesamt} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} SCR_i^2 + 2\sum\sum_{i<j} \rho_{ij} \cdot SCR_i \cdot SCR_j}$$

$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(R\left(X_i\right) - \mu_i\right)^2 + 2\sum\sum_{i<j} \rho_{ij} \left(R\left(X_i\right) - \mu_i\right)\left(R\left(X_j\right) - \mu_j\right)}$$

unter Berücksichtigung von Abhängigkeiten, z.B. paarweisen Korrelationen

$$\rho_{ij} = \frac{E\left(X_i X_j\right) - E\left(X_i\right)E\left(X_j\right)}{\sqrt{Var\left(X_i\right)}\sqrt{Var\left(X_j\right)}}$$

Eine Idee der „Wurzelformel" ist die Darstellung des **V**alue **at** **R**isk (VaR) als Risikomaß zur Berechnung des erforderlichen Risikokapitals für ein Einzelrisiko X_i als

$$VaR_\alpha(i) = \mu_i + k_\alpha \sigma_i\,,\ k_\alpha \in \mathbb{R},$$

mit Erwartungswert $\mu_i \in \mathbb{R}$ und Standardabweichung $\sigma_i \geq 0$.

Sind die Risiken X_i normalverteilt, gilt

$$k_\alpha = \Phi^{-1}(1-\alpha) \quad \text{mit} \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = \int_{-\infty}^{x} \varphi(u)\ du\,,$$

wobei k_α unabhängig von μ_i und σ_i für $i = 1, \ldots, n$ ist.

<u>Ähnlich</u>: Der Expected Shortfall (ES) für normalverteilte Einzelrisiken X_i ist gegeben durch

$$ES_\alpha(i) = \mu_i + \frac{e^{-\frac{(k_\alpha)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}\alpha}\sigma_i = \mu_i + \tau_\alpha \sigma_i \text{ mit } k_\alpha = \Phi^{-1}(1-\alpha).$$

Kommentar:

- Bei Normalverteilung ist VaR ein kohärentes Risikomaß für $k_\alpha \geq 0 \left(\Leftrightarrow \alpha \leq \frac{1}{2}\right)$.
- Bei Normalverteilung ist die gegenseitige Abhängigkeitsstruktur der Risiken vollständig und eindeutig durch die paarweisen Korrelationen bestimmt.
- ES ist stets ein kohärentes Risikomaß (unter jeder Verteilungsannahme).

Folgerung:

Bei Normalverteilung ist die Wurzelformel konsistent mit der Definition des SCR, und zwar sowohl für VaR als auch für ES.

Aber:

- Bei Nicht-Normalverteilung ist VaR im Allgemeinen ***kein*** kohärentes Risikomaß.
- Bei Nicht-Normalverteilung ist das der Wurzelformel zu Grunde liegende Prämienprinzip (Standardabweichungsprinzip) ***nicht*** kohärent ($\rightarrow$ Monotonie verletzt)
- Bei Nicht-Normalverteilung ist die gegenseitige Abhängigkeitsstruktur der Risiken ***nicht*** eindeutig durch die paarweisen Korrelationen bestimmt.

„Wie die Portfoliotheoretiker bislang Risiken gemessen haben, wird der Wirklichkeit nicht gerecht. Dem zugrunde liegen viele ***falsche Annahmen*** – darunter die der Gauß-schen ***Normalverteilung***. Im Ergebnis werden ***Risiken*** an den Finanzmärkten ***signifikant unterschätzt***."

Honorar-Professor Benoit B. Mandelbrot, Yale University

„Uns ist durchaus bewusst, dass die klassischen Risikomaße keinesfalls die tatsächlichen Gegebenheiten des Marktes widerspiegeln. Langfristig wollen wir uns ***anderer Verteilungsfunktionen*** zur Berechnung des Value-at-Risks bedienen, die hohen Verlustereignissen höhere Wahrscheinlichkeiten zuordnen, um somit das Risiko noch besser steuern zu können."

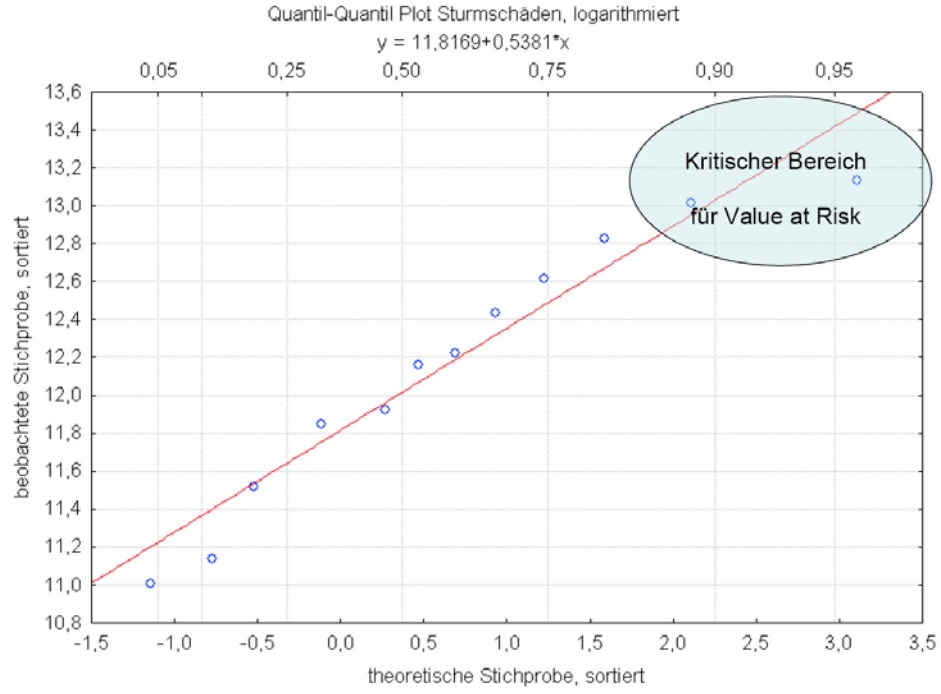
Richard Peters**,** Vorstand der Versorgungsanstalt des Bundes und der Länder

aus: Deutsche Pensions- und Investment-Nachrichten vom 8.5.2006

Beispielrechnung für einen VVaG für Sturm mit Extremwertverteilung:

Daten Muster-VVaG (verfremdet):

Jahr	Anpassungsfaktor Bestand	Originalschäden	Bestandsbereinigte Schäden
1993	2,214	63.098	139.680
1994	1,914	194.334	371.907
1995	1,637	273.984	448.561
1996	1,372	101.782	139.644
1997	1,464	95.384	139.642
1998	1,06	64.657	68.543
1999	0,972	155.333	150.962
2000	0,97	310.568	301.177
2001	0,984	193.706	190.642
2002	0,964	260.172	250.820
2003	0,966	103.895	100.369
2004	0,991	508.792	504.320
2005	1,003	60.184	60.393
2006	1	203.035	203.035

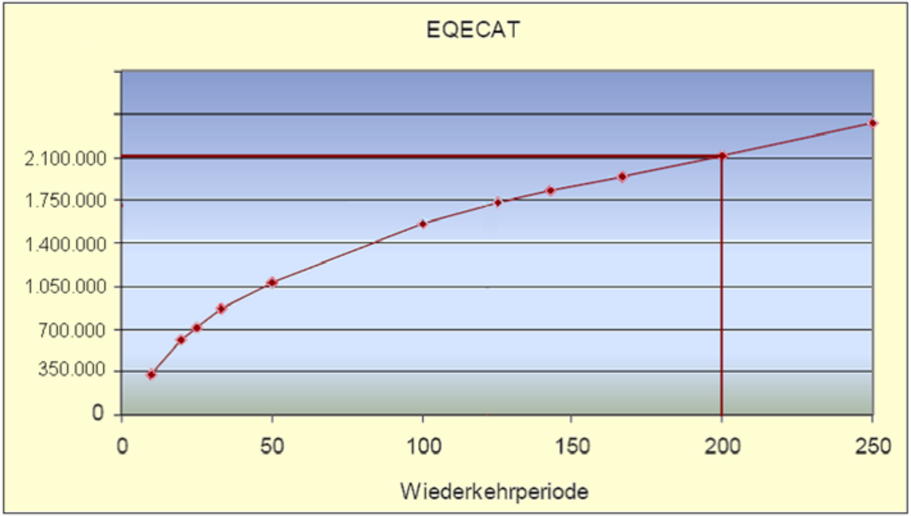

Quantil-Quantil Plot Sturmschäden, logarithmiert
y = 11,8169+0,5381*x
0,05
0,25
0,50
0,75
0,90
0,95
13,6
13,4
13,2
13,0
12,8
12,6
12,4
12,2
12,0
11,8
11,6
11,4
11,2
11,0
10,8
beobachtete Stichprobe, sortiert
-1,5
-1,0
-0,5
0,0
0,5
1,0
1,5
2,0
2,5
3,0
3,5
theoretische Stichprobe, sortiert
Kritischer Bereich
für Value at Risk

Unterschreitenswahrscheinlichkeit	Wiederkehrperiode	Value at Risk
0,5	2	165.086 €
0,6	2,5	194.552 €
0,8	5	303.798 €
0,9	10	454.941 €
0,99	100	1.610.959 €
0,995	**200**	**2.342.376 €**
0,996	250	2.641.930 €

Erwartungswert (= Bedarfsprämie): **219.264 €**

Value at Risk zur Wiederkehrperiode 200 Jahre: **2.342.376 €**

Kyrill: 430.000 €



Value at Risk zur Wiederkehrperiode 200 Jahre: **2.200.000 €**

Kyrill: 430.000 €

→ Rückversicherung! (Standardformel??)

3. Probleme mit der Wurzelformel

Wesentlicher Aspekt eines **Standard-Modells** (in Einklang mit der IAA):

Die Eigenkapitalausstattung des Versicherungsunternehmens muss so beschaffen sein, dass die Wahrscheinlichkeit, dass das Unternehmen innerhalb des nächsten Jahres seinen Verpflichtungen ***nicht*** nachkommen kann, höchstens α beträgt.

Aktuell wird bei VaR als Risikomaß $\alpha = 0.005$, bei ES $\alpha = 0.01$ als sinnvoll angesehen.

Das bedeutet: die Berechnung des SCR (insbesondere über die Wurzelformel) muss sich an dieser Forderung messen lassen!

Aber Beobachtung: speziell bei rechts-schiefen Verteilungen unterschätzt die Wurzelformel den Kapitalbedarf deutlich!

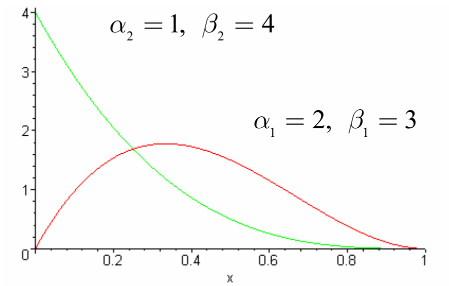
Beispiel 1: Überprüfung der Wurzelformel bei Beta-Verteilungen:

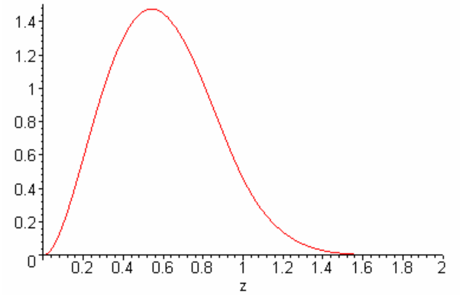
Wir betrachten zwei unabhängige Beta-verteilte Risiken X_1 und X_2 mit den Dichten

$$\boxed{f_i(x) = \frac{x^{\alpha_i - 1}(1-x)^{\beta_i - 1}}{B\left(\alpha_i, \beta_i\right)} \quad \text{für } 0 \le x \le 1,\ \ i = 1, 2.}$$

Für ganzzahlige Werte von α_i, β_i kann die Dichte *g* der Summe $S = X_1 + X_2$ explizit als stückweise definiertes Polynom bestimmt werden; beispielsweise ergibt sich für $\alpha_1 = 2,\ \beta_1 = 3,\ \alpha_2 = 1,\ \beta_2 = 4$:

$$g(z) = \begin{cases} 24z^2 - 56z^3 + 48z^4 - \frac{96}{5}z^5 + 4z^6 - \frac{12}{35}z^7 & \text{für } 0 \le z \le 1 \\ \frac{256}{35} - \frac{192}{5}z^2 + 64z^3 - 48z^4 + \frac{96}{5}z^5 - 4z^6 + \frac{12}{35}z^7 & \text{für } 1 \le z \le 2. \end{cases}$$





Graphen der Dichten f_1 (rot) und f_2 (grün)

sowie der Summendichte g

Legt man als Risikomaß den $\mathrm{VaR}_{0.005}$ zu Grunde, so ergibt sich für die Einzelrisiken:

$$SCR_i = F_i^{-1}(0.995) - \mu_i = F_i^{-1}(0.995) - \frac{\alpha_i}{\alpha_i + \beta_i}, \quad i = 1, 2$$

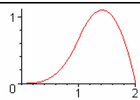
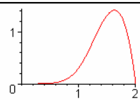
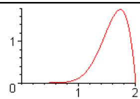
mit den Verteilungsfunktionen $F_i(x) = \int_0^x f_i(u)\, du,\ 0 \leq x \leq 1.$

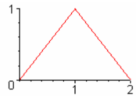
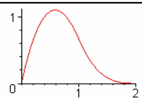
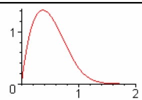
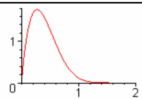
Die Quantile können trotz der polynomialen Form der Dichten bei ganzzahligen Parametern im Allgemeinen nur numerisch berechnet werden.

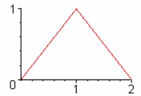
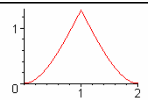
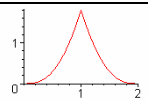
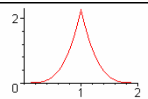
Die folgende Tabelle zeigt die jeweiligen Kapitalbedarfe (SCR-Levels) $K_{0.005}$, zum Einen nach Wurzelformel

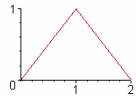
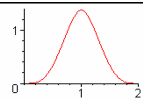
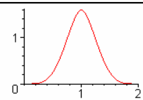
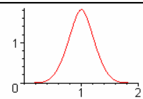
$$K_{0.005}^{\sqrt{}} = \mu_1 + \mu_2 + \sqrt{SCR_1^2 + SCR_2^2}\ ,$$

zum Anderen exakt (als $\mathrm{VaR}_{0.005}$ für das Summenrisiko).

α_1	β_1	α_2	β_2	**Dichte *g* der Summe**	$K^{\sqrt{}}_{0.005}$	**VaR$_{0.005}$**	**Abw. in %**
1	1	1	1		**1.7000**	**1.9000**	**11,76**
2	1	2	1		**1.7036**	**1.9491**	**14,41**
3	1	3	1		**1.7047**	**1.9659**	**15,32**
4	1	4	1		**1.7053**	**1.9743**	**15,77**

α_1	β_1	α_2	β_2	**Dichte *g* der Summe**	$K_{0.005}^{\sqrt{}}$	**$\mathrm{VaR}_{0.005}$**	**Abw. in %**
1	1	1	1		**1.7000**	**1.9000**	**11,76**
1	2	1	2		**1.6071**	**1.5838**	**-1,45**
1	3	1	3		**1.4653**	**1.3187**	**-10,00**
1	4	1	4		**1.3310**	**1.1230**	**-15,63**

α_1	β_1	α_2	β_2	**Dichte g der Summe**	$K^{\sqrt{}}_{0.005}$	**VaR$_{0.005}$**	**Abw. in %**
1	1	1	1		**1.7000**	**1.9000**	**11,76**
1	2	2	1		**1.6571**	**1.8009**	**8,68**
1	3	3	1		**1.5971**	**1.7056**	**6,79**
1	4	4	1		**1.5510**	**1.6240**	**4,71**

α_1	β_1	α_2	β_2	**Dichte g der Summe**	$K_{0.005}^{\sqrt{}}$	**VaR$_{0.005}$**	**Abw. in %**
1	1	1	1		**1.7000**	**1.9000**	**11,76**
2	3	3	2		**1.6106**	**1.6852**	**4,63**
2	4	4	2		**1.5717**	**1.6276**	**3,56**
2	5	5	2		**1.5405**	**1.5760**	**2,30**

Aus der **Modellbeschreibung** des GDV:

> Wichtiges Ziel bei einer umfassenden Risikobetrachtung ist die Berücksichtigung von ***Korrelationseffekten*** zwischen verschiedenen Teilrisiken. Eine Bezugnahme auf die Gesamtrisikosituation des Versicherungsunternehmens ohne eine solche Betrachtung entspricht nicht dessen tatsächlicher Risikosituation.

Anmerkung: ***Korrelationseffekte*** alleine reichen leider auch nicht aus, die Gesamtrisikosituation des Versicherungsunternehmens angemessen abzubilden!

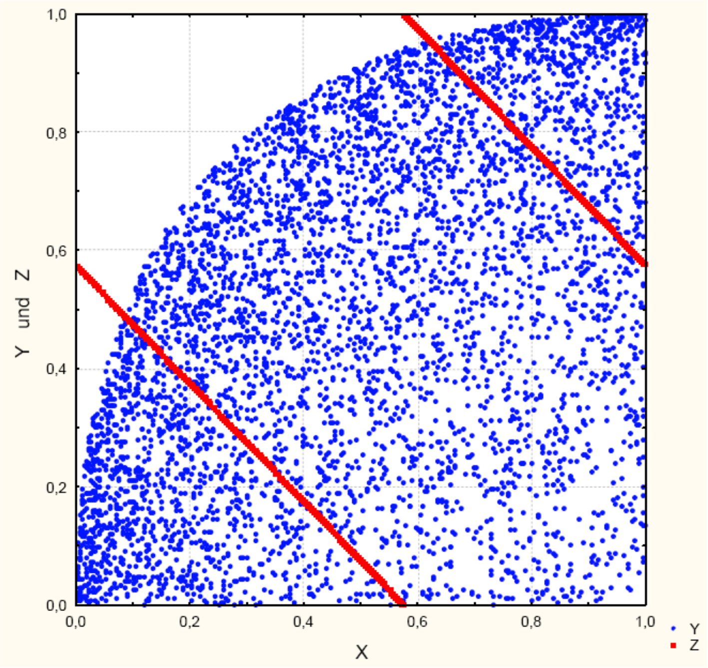
Abhängigkeit vs. Korrelation:

Beispiel:

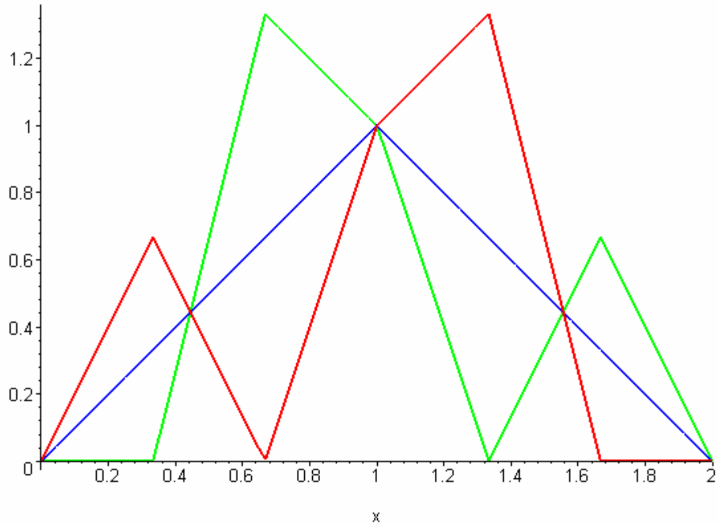
Zufallsvariablen X, Y und Z mit identischen (uniformen) Randverteilungen und gleichen Korrelationen

$$\rho^L(X,Y) = \rho^L(X,Z) = 7/15$$

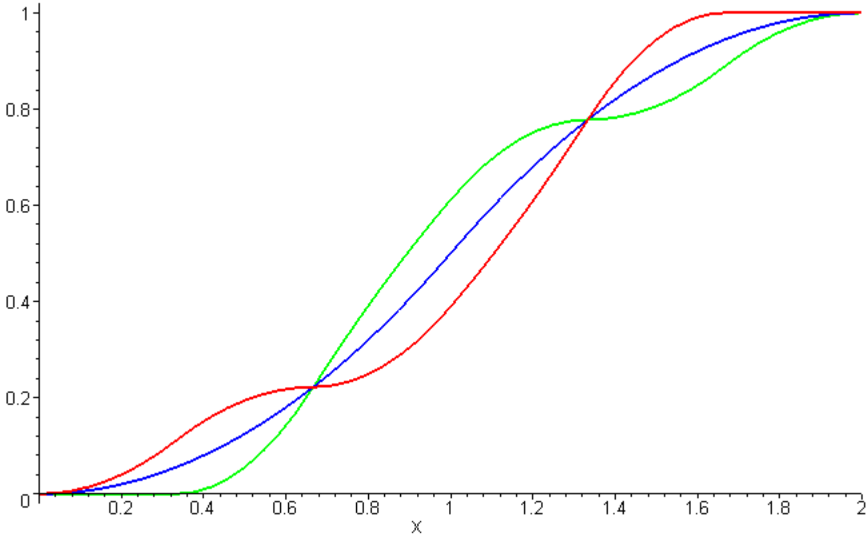
aber verschiedener gemeinsamer Verteilungsstruktur



Beispiel 2: SCR-Berechnung für ***unkorrelierte, aber abhängige*** Risiken X_1 und X_2:



Dichten des Summenrisikos für verschiedene Situationen



zugehörige Verteilungsfunktionen

In den drei Fällen erhält man folgende Werte für die Risikomaße:

	pos. abhängig	unabhängig	neg. abhängig	Wurzelformel
$VaR_{0.1}$	**1.6838**	**1.5528**	**1.4430**	**1.5657**
$ES_{0.1}$	**1.7892**	**1.7019**	**1.5269**	**1.6364**
$VaR_{0.01}$	**1.9000**	**1.8586**	**1.5960**	**1.6930**
$ES_{0.01}$	**1.9333**	**1.9057**	**1.6225**	**1.7000**
$VaR_{0.005}$	**1.9293**	**1.9000**	**1.6167**	**1.7000**
$ES_{0.005}$	**1.9411**	**1.9167**	**1.6260**	**1.7036**

Value at Risk (VaR) and Expected Shortfall (ES)
mit $\alpha = 0.1,\ \alpha = 0.01,$ und $\alpha = 0.005$

Abweichungen in % (bezogen auf Wurzelformel):

	pos. abhängig	unabhängig	neg. abhängig	Wurzelformel
$VaR_{0.1}$	**7.54**	**–0.82**	**–7.84**	**1.5657**
$ES_{0.1}$	**9.34**	**4.00**	**–6.69**	**1.6364**
$VaR_{0.01}$	**12.23**	**9.78**	**–5.73**	**1.6930**
$ES_{0.01}$	**13.72**	**12.10**	**–4.56**	**1.7000**
$VaR_{0.005}$	**13.49**	**11.76**	**–4.90**	**1.7000**
$ES_{0.005}$	**13.94**	**12.51**	**–4.56**	**1.7036**

Value at Risk (VaR) and Expected Shortfall (ES)
mit $\alpha = 0.1$, $\alpha = 0.01$, und $\alpha = 0.005$

4. Zusammenfassung und Ausblick

- Ein Standardansatz ist nicht ausreichend für eine angemessene Beurteilung der „wahren" Risikosituation eines KMVU
- Ein Standardansatz ist kein geeignetes Instrument für ein unternehmensinternes Risikomanagement
- Das ORSA (Säule 2) erfordert künftig spezifischere Betrachtungsweisen
- Angemessene (partiell-)interne Modelle können die Eigenmittelanforderungen an KMVU unter Solvency II gegenüber dem Standardansatz senken
- Angemessene (partiell-)interne Modelle können zur „Optimierung" der Rückversicherungsordnung eines KMVU eingesetzt werden

- Begleitende wissenschaftliche Forschung + firmeninterne Weiterbildung können die Kosten der Umsetzung von Solvency II bei KMVU deutlich senken
- Begleitende wissenschaftliche Forschung mit / für KMVU erleichtert einen Vergleich von Standardansatz und internem Modell und kann wegen der geringeren Komplexität die Schwächen eines Standardansatzes besser verdeutlichen